Урок №1 (10.09.2019)
Механические колебания.

0. Краткий обзор пройденных тем

- Кинематика
- Динамика (+ статика)
- Законы сохранения энергии и импульса в механике
- Механика жидкости и газов
- Термодинамика
- Молекулярно-кинетическая теория
- Электростатика
- Постоянный ток
- Магнитостатика
- Цепи переменного тока
- Переходные процессы в RC- и RL- цепочках

Разговор о том, что осталось.

1. Описание механической системы

Заметим, что для описания движения системы частиц, необходимо знать следующее:

- либо функцию, описывающую положение всех материальных точек системы в любой момент времени, либо функцию, описывающую положение и импульсы всех материальных точек системы в какой-то конкретный момент времени.
- набор констант, задающих параметры движения тела в момент времени $t = 0$ – начальное положение x_0, начальную скорость v_0, начальное ускорение a_0 (раньше мы рассматривали равноускоренное движение, и a_0 было просто равно постоянному ускорению a с которым движется тело).

Зная, например, функцию, описывающую положение тела в любой момент времени $x(t)$, мы могли получить и функцию, описывающую скорость тела в любой момент времени: $v(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$. Аналогично получалась и функция, описывающая ускорение тела в любой момент времени: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$. И так далее.

В качестве примера рассмотрим одномерное равноускоренное движение. Как известно, положение тела в этом случае описывается следующим уравнением: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

В этой формуле x_0, v_0 и a – константы, задающие положение, скорость и ускорение тела в момент времени, когда мы начали наблюдение ($t = 0$). Легко заметить, что $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v(t) = v_0 + at$ – хорошо известная формула скорости равноускоренного движения.

Вторая производная от положения по времени $\ddot{x}(t) = a(t) = a$ даёт ускорение в любой момент времени. Т.к. движение у нас *равноускоренное*, т.е. с постоянным ускорением, мы, как и следовало ожидать, получаем, что ускорение не зависит от времени и равно константе a.

Совершенно аналогично мы можем записать зависимость положения, скорости, ускорения тела в случае движения в пространстве:

если у нас известна функция $\vec{r}(t)$, то скорость в любой момент времени равна $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$, а ускорение – $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$.

Пользуясь принципом независимости движения мы в процессе решения получившейся системы уравнений раскладывали векторы по осям X, Y, Z и получали систему из нескольких нелинейных уравнений.

Заметим, что принцип независимости движения работает только в системах, в которых отсутствуют механические связи: к примеру, движение бусинки, нанизанной на леску в форме окружности, описать независимо по осям не удастся.

Попробуем, пользуясь связью между функциями положения тела, скорости и ускорения в произвольный момент времени, решить следующую задачу:

Груз массы m лежит на горизонтальном абсолютно гладком столе. Слева груз соединён пружиной жёсткости k с вертикальной стенкой. Описать движение груза во времени.

2. Свободные механические колебания

Груз на пружинке.

Рассматриваем груз массы m, лежащий на гладкой плоскости, прикреплённый с одной стороны к стенке (слева) через невесомую идеальную пружину жёсткости k.

Расположим систему координат так, чтобы ось X лежала вдоль плоскости и положение груза, при котором пружина не растянута, соответствовало координате $x = 0$.

Сместим груз на небольшое расстояние x (малое, в смысле закона Гука, т.е. пружина испытывает упругую деформацию). Возникает *возвращающая сила* $F(x) = -kx$ – смысл слова *возвращающая* в знаке «минус».

Отпустим груз. Тогда, по второму закону Ньютона $ma = -kx$.

Учитывая, что $a = \ddot{x}(t)$, получим:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t), \text{ или } \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

Обратим внимание, что $\ddot{x}(t)$ – это не просто какая-то функция времени, а именно вторая производная функции $x(t)$, т.е. они <u>взаимосвязаны</u>.

Заметим, что получившееся равенство есть, по сути дела, уравнение относительно $x(t)$, т.е. для того, чтобы выяснить, как будет двигаться груз, нам надо найти функцию $x(t)$, которая *при любых* t, превращала бы полученное выражение в тождество. Такое уравнение называется *дифференциальным уравнением второго порядка*.

Решается оно «угадыванием», или детальным анализом движения тела. В нашем случае, например, наблюдая за движением груза, можно заметить следующее:

- при прохождении точки равновесия $x = 0$ скорость груза максимальна;
- скорость груза плавно уменьшается по абсолютной величине и достигает нуля в крайних точках положения груза;
- груз движется симметрично влево и вправо, т.е. его максимальные отклонения от точки равновесия равны;
- из закона сохранения энергии можно написать, что $\frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2}$, где x_m – максимальное отклонение, а v_m – максимальная скорость груза.

Опираясь на эти наблюдения, мы можем предположить, что функция скорости от времени имеет вид синуса или косинуса. Зная, что косинус – это производная синуса, мы можем предположить, что положение тела описывается, скажем, формулой $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$. Тогда $\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$ и $\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha)$.

Заметим, что всё это время мы просто «гадаем», опираясь на наши наблюдения. Нам может повести в наших догадках, а может и не повести! Более того, если мы найдём решение, надо будет потом ещё доказывать, что других не существует!

Проверим теперь наши предположения. Подставляя $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$ в наше уравнение, получим: $-A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) + \frac{k}{m}A\sin(\omega t + \alpha) = 0$, откуда получаем, что при $\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$ наше уравнение превращается в тождество при любых значениях времени.

Итак, нам повезло, – мы решили наше дифференциальное уравнение второго порядка! Рассмотрим наше решение:

$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$, где $\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Терминология.

Введём терминологию: A – *амплитуда* колебаний; ω – *циклическая частота* колебаний; α – *начальная фаза* колебаний, а весь аргумент синуса $(\omega t + \alpha)$ называется *фазой* колебаний. Любая физическая система, движущаяся по полученному закону, называется *гармоническим осциллятором*.

Обратим внимание, что A и α остались неопределёнными константами. Они определяются *начальными условиями*.

Связь между периодом T, частотой f и циклической частотой ω: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Частота f измеряется в *герцах*, круговая частота ω – в радианах в секунду (рад/с).

Чаще всего в задачах требуется найти период колебаний T.

Изохронность осциллятора.

Заметим, что частота собственных колебаний нашего осциллятора не зависит от начальных условий. Т.е. если мы оттянем пружину на 1 см или на 1 м, частота колебаний не изменится! Главное, чтобы при этом деформация пружины оставалась упругой.

Малые колебания.

Заметим, что мы решили не только задачу, описывающую движение груза, прикреплённого к пружине. Мы решили произвольную задачу вида: *описать движение тела, если при смещении тела из положения равновесия, возникает возвращающая сила, пропорциональная смещению*.

Ещё один интересный факт: в большинстве механических систем, находящихся в состоянии устойчивого равновесия, при малом смещении возникает возвращающая сила, пропорциональная этому смещению – это закон Гука: $F(x) = -kx$! Причём речь идёт не только о деформациях: чуть ниже мы, например, разберём колебания *математического маятника*, в котором силы упругости не действуют.

Т.е. мы решили целый класс задач, касающихся систем, находящихся в состоянии устойчивого равновесия: малое отклонение такой системы от равновесного состояния приводит к колебаниям, которые можно описать функцией $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$, где $\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$. Такие колебания называются *гармоническими*.

Математический маятник.

Математический маятник – это материальная точка (груз) массы m, подвешенная в поле силы тяжести на нити, длины l. Груз отклоняют на небольшой угол θ, так чтобы длина дуги $l \cdot \theta$ была много меньше длины нити l.

В простейшем случае полагаем, что ускорение направлено тангенциально (т.е. вдоль окружности, по которой движется материальная точка). В этом случае возвращающая сила равна $F(x) = -mg\sin\theta$, где x – смещение груза по горизонтали.

Т.к. мы рассматриваем малое смещение, мы можем сделать два упрощения: во-первых, мы можем считать $\sin\theta \approx \theta$, во-вторых, длину дуги, на которую отклонили груз – $l \cdot \theta$, мы можем заменить на смещение груза по горизонтали x.

В итоге получим: $F(x) = -mg\sin\theta \approx -mg\theta = -\frac{mg}{l} \cdot l \cdot \theta \approx -\frac{mg}{l} \cdot x$.

Итак, в этом случае коэффициент k в возвращающей силе равен $k = \frac{mg}{l}$. Подставляя это в выражение для круговой частоты, получим для математического маятника: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{ml}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Мы можем получить это же решение без сведения задачи к предыдущей. Действительно, для математического маятника можно записать второй закон Ньютона $ma(t) = -mg\sin\theta(t)$, *где* $\theta(t)$ *– угол наклона маятника в момент времени* t.

Учитывая связь между угловым и линейным ускорением $\ddot{\theta}(t) = \frac{a(t)}{l}$, *а также вспоминая, что для малых углов* $\sin\theta \approx \theta$, *получим:*

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{a(t)}{l} = -\frac{g}{l}\sin\theta(t) \approx -\frac{g}{l}\theta(t).$$

В итоге мы получаем дифференциальное уравнение $\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\theta(t)$, *которое мало чем отличается от аналогичного для колебаний груза на пружинке.*

Решая его, получаем циклическую частоту малых колебаний математического маятника: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.